

## Svar till övningar på tidsdilatation och rumtidsgeometri

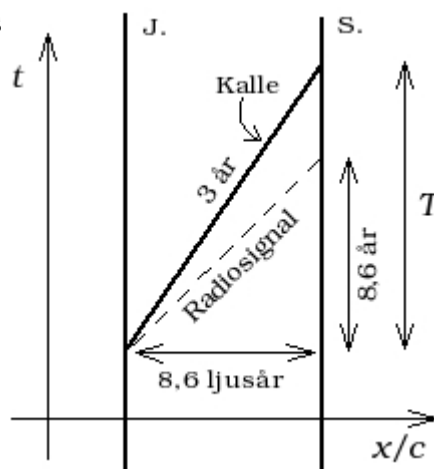
1. Betrakta diagrammet till höger. Pythagoras sats ger

$$3^2 = T^2 - 8,6^2$$

$$\Rightarrow T \approx 9,11 \text{ år}$$

Radiosignalen tar 8,6 år på sig att nå fram, så Siriusianernas förberedelsestid blir

$$T - 8,6 \approx 0,51 \text{ år}$$



2.

- a) Under Castors resa tur och retur förflyter tiden

$$\frac{2 \cdot 46}{0,95} \approx 96,84 \text{ år}$$

på jorden. Under Pollux resa tur och retur förflyter tiden

$$\frac{2 \cdot 35}{0,9} \approx 77,78 \text{ år}$$

på jorden. Så Pollux kommer först och får vänta

$$96,84 - 77,78 \approx 19 \text{ år}$$

- b) Med hjälp av Pythagoras sats kan vi räkna ut hur mycket Castor respektive Pollux åldras innan de kommer tillbaka:

$$\text{Castor åldras } 2 \sqrt{\left(\frac{46}{0,95}\right)^2 - 46^2} \approx 30,24 \text{ år}$$

$$\text{Pollux åldras } 2 \sqrt{\left(\frac{35}{0,9}\right)^2 - 35^2} \approx 33,90 \text{ år}$$

Pollux får vänta ytterligare 19,06 år innan Castor är tillbaka och hinner således åldras totalt

$$33,9 + 19,06 = 52,96 \text{ år}$$

Ålderskillnaden mellan dem blir alltså

$$52,96 - 30,24 \approx 23 \text{ år}$$

3. Kolonisterna når, i jordtid, fram efter tiden

$$T = \frac{L}{v} = \frac{68}{0,99} \text{ år}$$

Under färden åldras de

$$T' = T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{68}{0,99} \sqrt{1 - 0,99^2} \approx 9,69 \text{ år}$$

Radiomeddelandet tar 68 år på sig, och når alltså fram  $68 + 9 = 77$  år efter kolonisternas avfärd (i jordtid). Efter att kolonisterna kommit fram tar det därför ytterligare  $77 - T$  år innan de nås av meddelandet. Alltså åldras de sammanlagt

$$T' + 77 - T \approx 18,0 \text{ år}$$

innan de får meddelandet.

- 4.

a)  $T = 200$  år

$$L = vt = 0,95 ct$$

där  $t$  är den sökta tiden.

Eftersom meddelandet färdas med farten  $c$  gäller att

$$T - t = \frac{L}{c}$$

Om detta kombineras med uttrycket för  $L$  ovan erhålls ekvationen

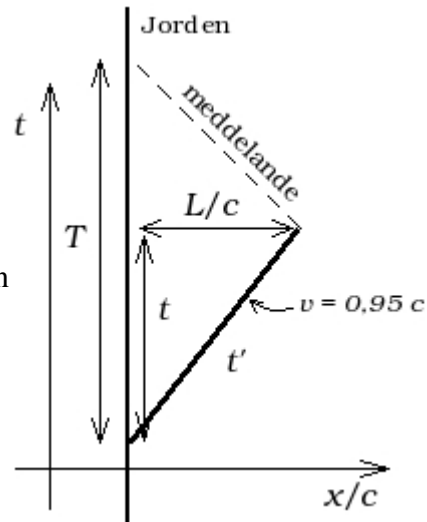
$$T - t = 0,95 t$$

Lös ur detta ut  $t$ :

$$t = \frac{T}{1 + v/c} = \frac{200}{1,95} \approx 103 \text{ år}$$

- b) Tidsdilatationsformeln ger att den tid som förflyter ombord på skeppet är

$$t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 32 \text{ år}$$



- 5.

- a) Tidsdilatationsformeln ger

$$T_{\text{jord}} = \frac{T_{\text{Astrid}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{4}{\sqrt{1 - 0,6^2}} = 5 \text{ år}$$

Så 10 år har förflutit på jorden när Astrid kommer tillbaka.

- b) När Astrid vänder om är hon

$$v \cdot T_{\text{jord}} = 3 \text{ ljusår}$$

bort från jorden (enligt jorden). Signalen som hon då tar emot måste ha varit på väg i 3 år. Alltså var det nyåret 2502 som hon såg på tv.

- c) Under sin hemfärd ser hon tv-utsändningar från 8 år (från nyår 2502 till hennes återkomst nyår 2510). Själv åldras hon 4 år. Alltså går allt i dubbla farten på tv-rutan.

6.

a)  $v_{\text{jord}} = 0,5c$

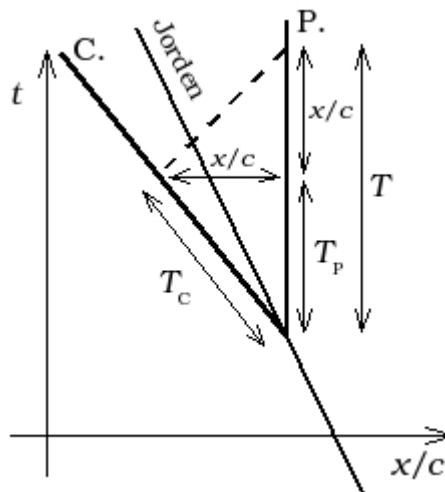
$$v_{\text{Castor}} = \frac{0,5c + 0,5c}{1 + 0,5^2} = 0,8c$$

b)  $T_{\text{Castor}} = 1$  timme

$$T_{\text{Pollux}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,8^2}} \approx 1,67 \text{ timmar}$$

$$x = T_{\text{Pollux}} \cdot v_{\text{Castor}} \approx 1,33c$$

$$T = T_{\text{Pollux}} + \frac{x}{c} \approx 1,67 + 1,33 = 3 \text{ timmar}$$



7.  $L/c = 4$  ljusår

$$t = 6 \text{ år}$$

$$v_A = 0,8c$$

$$v_S = 0,96c$$

Astrids resa tar i jordtid  $L/v_A = 5$  år

Stellas resa tar i jordtid  $L/v_S \approx 4,167$  år

Astrid åldras under sin resa

$$T_A = \frac{L}{v_A} \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}} = 3 \text{ år}$$

Stella åldras under sin resa

$$T_S = \frac{L}{v_S} \sqrt{1 - \frac{v_S^2}{c^2}} = 1,167 \text{ år}$$

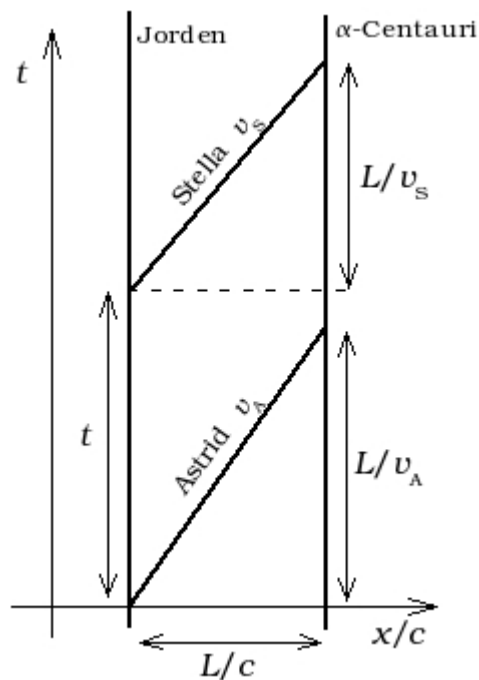
Astrid har då de återses åldrats sammanlagt

$$T_A + t - \frac{L}{v_A} + \frac{L}{v_S} \approx 8,167 \text{ år}$$

Stella har då de återses åldrats sammanlagt

$$t + T_S \approx 7,167 \text{ år}$$

Åldersskillnaden mellan dem är då 1 år.



8. Det är det äldsta av syskonen, Arvid, som ger sig iväg. Resan ska orsaka en tidsförskjutning om precis ett år mellan syskonen. Alltså:

$$2T - 2t = 1$$

där  $2T$  och  $2t$  är hur mycket Beata respektive Arvid åldras under Arvids resa.

Tidsdilatationsformeln, med hastigheten insatt, ger

$$T = \frac{t}{\sqrt{1-0,8^2}}$$

Med hjälp av lite algebra kan  $t$  elimineras ur dessa två uttryck. Resultatet blir

$$2T = \frac{1}{1-\sqrt{1-0,8^2}} = 2,5 \text{ år}$$

Arvid måste alltså resa senast 2,5 år (jordtid) innan festen.

