Newtons låtsasmåne

Sören Holst

Newtons storhet bestod i att han – med Arthur Koestlers ord – associerade ett fallande äpple inte med dess mogenhet utan med månens rörelse. För att förmedla sin insikt om den universella gravitationen tog han hjälp av ett par tankeexperiment.

Att förklara så mycket som möjligt ur så lite som möjligt. Detta är vad vetenskap ytterst handlar om: att förstå vitt skilda fenomen utifrån ett fåtal grundläggande principer. Således eftersträvar vi teorier som utgår från ett minimum av grundantaganden och är enkla att formulera, men som på samma gång förmår omfatta så mycket som möjligt – helst allt! Få saker gör en fysiker så upphetsad som insikten att två till synes väsensskilda fenomen i själva verket är uttryck för en och samma naturlag.

Den mest omvälvande vetenskapliga landvinningen av detta slag måste tillskrivas Isaac Newton. Han gjorde upp med den sedan länge förhärskande idén att de naturlagar som råder på jorden är väsenskilda från de som råder i de himmelska regionerna. Han visade att fallrörelse vid jordytan och himlakropparnas rörelser var uttryck för samma fenomen: gravitationen.

Newton var naturligtvis inte först med att formulera en enhetlig teori som innefattade så väl himmelska som jordiska fenomen. En några decennier äldre föregångare var Descartes virvelteori. Men Newton var den förste att tillhandahålla en enhetlig teori som dessutom var både matematiskt precis och empiriskt korrekt.

1728 utkommer *A Treatise of the System of the World*, en populariserad version av vissa delar av den berömda *Principia*. Här förmedlar Newton sin insikt om gravitationen på lättillgänglig form.

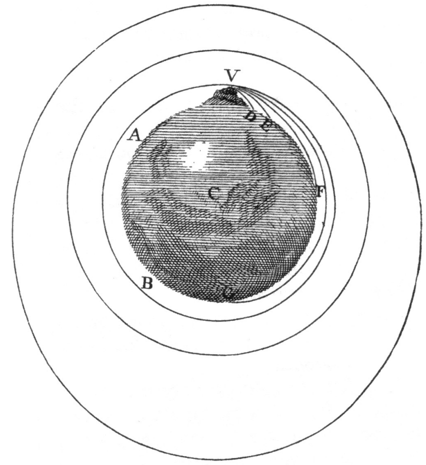
Han ber läsaren att föreställa sig ett objekt, säg en kanonkula, som kastas eller skjuts iväg från ett högt berg med varierande utgångshastighet. Man börjar med att helt enkelt släppa kanonkulan – den faller då tungt till marken längs en rak lodrät bana. Sedan stöts kulan iväg med en lätt horistonell knuff – den följer då en svagt böjd bana och landar några meter bort. Så bibringas kulan en allt större horisontell utgångshastighet, lämpligen med hjälp av en kanon. Ju större fart varmed kulan skjuts iväg, desto längre blir skottet.

Redan ett halvsekel tidigare hade Galileo fastställt att den horisontella delen av hastigheten under en kastbana förblir oförändrad, förutsatt att luftmotståndet kan försummas. Det som får banan att böja av ner mot jorden är att en vertikal hastighet tillkommer.

Om kanonkulans utgångshastighet vore väldigt stor så skulle jordens krökning få betydelse för skottets längd: samtidigt som kanonkulan erhåller en vertikal hastighetskomponent så kröker sig jordytan bort från kastbanan, och kulan når längre innan den tar mark. Det är nu tydligt att det bör finnas en utgångshastighet som är så stor att kulan *aldrig* tar mark – sådan att jordytan kröker sig bort från kulans bana lika snabbt som banan böjer av ner mot jorden. En kanonkula skulle därför i princip – i frånvaro av luftmotstånd och om den skjuts ut med tillräckligt stor kraft – kunna försättas i en cirkulär bana kring jorden.

Det finns förstås ingenting som hindrar att vi skjuter iväg kanonkulor på samma sätt men från högre höjder, kanske från åtskilliga jordradiers höjd.

Those bodies, according to their different velocity, and the different force of gravity in different hights, will describe arcs either concentric with the Earth, or variously excentric, and go on revolving through the heavens in those trajectories, just as the Plantets do in their orbs.



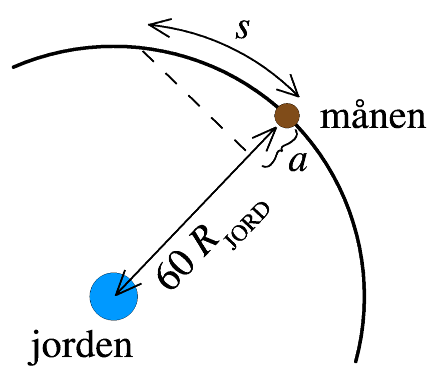
Newton föreställde sig en projektil som skjuts iväg med allt större utgångshastighet horisontellt ut från ett högt berg. Han insåg att den för tillräckligt stor hastighet borde hamna i bana runt jorden. (Figuren är från Newtons *A Treatise of the System of the World* (1728).)

Newtons tankeexperiment låter oss inse att samma kraft som får oss att falla när vi snubblar också kan ligga bakom planeternas dans över himlavalvet.

Men skeptikern kan alltjämt tvivla. Kan verkligen den så välbekanta och påtagliga tyngdkraften ha något att göra med himlakropparnas rörelser? Newtons argument visar egentligen bara att den jordiska tyngdkraften i princip skulle kunna ge upphov till banor kring jorden, inte att verkliga planetbanor faktiskt är av det slaget.

Ett mindre känt – men faktiskt mer övertygande – tankeexperiment återfinns i tredje boken av *Principia.* Här är resonemanget på sätt och vis det omvända: i stället för att upphöja den jordiska fysiken till att omfatta även de himmelska fenomenen, så plockar Newton ner planeternas rörelser till jorden.

Till att börja med noterar Newton att månen, i sin bana kring jorden, kan sägas befinna sig i ständigt fall mot jorden (se figuren). Hur långt faller månen mot jorden under loppet av, säg, en minut? Newton känner till avståndet till månen – det är ungefär 60 jordradier. Han vet också månens omloppstid – den är drygt 27 dygn. Ur detta är det enkelt att få fram månens fart kring jorden och därmed hur långt bågsegment s som månen tillryggalägger under en minut. Enkel geometri ger sedan sträckan som månen faller mot jorden under denna minut – avståndet a i figuren. Newton får detta till "15 $^{1}/_{12}$ Paris feet". Uttryckt i modernare enheter är detta ungefär 4,9 meter.



Under det att månen förflyttar sig bågsegmentet s faller den sträckan a mot jorden.

Månen faller alltså 4,9 meter mot jorden varje minut. Att den trots det inte kommer närmare beror på att den dessutom har en horisontell hastighetskomponent.

Newton ber oss nu föreställa oss att jorden, likt Jupiter eller Saturnus, hade flera månar fördelade på olika avstånd. Alla dessa skulle förstås röra sig i enlighet med Keplers lagar. Säg att en av månarna var mycket liten och hade en omloppsbana nätt och jämnt större än jordens omkrets. Säg att den passerade precis ovanför de högsta bergen på jordens yta. Hur långt skulle denna måne falla under loppet av en minut?

Den lilla månen befinner sig på 1/60 av avståndet från jordens centrum ut till den riktiga månen. Ur Keplers lagar följer att planetbanors centripetalacceleration ökar kvadratiskt med minskande banradie. Därför måste den lilla månens fallsträcka under en minut vara 60^2 gånger så stor som för den riktiga månen.

Den lilla månen måste alltså falla $60^2 \times 4{,}9$ meter under en minut. Hur långt faller den under en sekund? Ja, eftersom det råkar gå just 60 sekunder på en minut, och eftersom fallsträckan går som tiden i kvadrat ($s = a\,t^2 / 2$), erhåller vi svaret genom att helt enkelt förkorta bort faktorn 60^2. Den lilla månen faller alltså 4,9 meter mot jorden varje sekund. Detta är just den sträcka som man faktiskt observerar att föremål som släpps vid jordytan faller under den första sekunden.

Newtons låtsasmåne måste således – om den ska följa Keplers lagar – bete sig på precis det sätt vi är vana vid att föremål vid jordytan beter sig på: den måste falla mot jordytan med tyngdaccelerationen *g*.

And therefore the force which retains the [real] moon in the orbit is that very force which we commonly call gravity; because otherwise this little moon at the top of a mountain must either be without gravity, or fall twice as swiftly as heavy bodies are wont to do.

Som genom ett trollslag har Newton förvandlat de himmelska principer som styr de onåbara planeterna till påtagliga jordiska naturlagar, tillgängliga för direkt experimenterande. Det man tidigare hade uppfattat som skilda företeelser – projektilers banor vid jordytan respektive planeters vandring över himlavalvet – kunde hädanefter beskrivas som uttryck för ett och samma fenomen: all materias attraktion till all annan materia.